or $f(0)=-\frac{1}{3}$, $f(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{7}$ d'où $-\frac{1}{3}\le U_{n+1}\le 0$

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}$, $-\frac{1}{3}\le U_n\le 0$.

b) $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$. Etudions les variations de f' sur $[-\frac{1}{3},0]$.

$$f''(x)=\frac{8(x^2+3)^2-8x(4x)(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{24(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$$

x	$-\frac{1}{3}$		0
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		↗	0
	$\frac{-27}{98}$		

d'où $|f'(x)|\le\frac{27}{98}$.

3°/ $|W_{n+1}-V_{n+1}|=|U_{2n+3}-U_{2n+2}|=|f(U_{2n+2})-f(U_{2n+1})|$

On a : f est dérivable sur $[-\frac{1}{3},0]$ et $\forall x\in[-\frac{1}{3},0]$, $|f'(x)|\le\frac{27}{98}$ donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$\forall X\in[-\frac{1}{3},0]$ et $\forall Y\in[-\frac{1}{3},0]$ on a : $|f(X)-f(Y)|\le\frac{27}{98}|X-Y|$

Donc $|f(U_{2n+2})-f(U_{2n+1})|\le\frac{27}{98}|U_{2n+2}-U_{2n+1}|\Rightarrow$

$|W_{n+1}-V_{n+1}|\le\frac{27}{98}|U_{2n+2}-U_{2n+1}|$

Or $|U_{2n+2}-U_{2n+1}|=|f(U_{2n+1})-f(U_{2n})|\le\frac{27}{98}|U_{2n+1}-U_{2n}|$

Donc $|W_{n+1}-V_{n+1}|\le\left(\frac{27}{98}\right)^2|W_n-V_n|$.